7. 3. CIĄG GEOMETRYCZNY

Definicja ciągu geometrycznego

Ciąg (a_n) jest **ciągiem geometrycznym** $\Leftrightarrow$ dla każdego $n \in N_+$ zachodzi $a_{n+1} = a_n \cdot q$, gdzie $q \in R$

q – stały **iloraz** ciągu geometrycznego

Przykład 7.3.1. Oblicz cztery początkowe wyrazy w ciągu geometrycznym , wiedząc, że

a) $a_1 = -3, q = 2$

Rozwiązanie	Komentarz
$a_1 = -3$ $a_2 = -3 \cdot 2 = -6$ $a_3 = -6 \cdot 2 = -12$ $a_4 = -12 \cdot 2 = -24$ Odp. –3, -6, -12, -24	W ciągu geometrycznym każdy wyraz , oprócz pierwszego powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez liczbę q , czyli $a_2 = a_1 \cdot q$ $a_3 = a_2 \cdot q$ $a_4 = a_3 \cdot q$ $a_5 = a_4 \cdot q$ ......

b) $a_1 = 3, a_2 = \frac{1}{2}$

Rozwiązanie	Komentarz
$a_2 = a_1 \cdot q$ $\frac{1}{2} = 3 \cdot q$ $3q = \frac{1}{2} / : 3$ $q = \frac{1}{6}$	Wykorzystując zależność $a_2 = a_1 \cdot q$ obliczamy iloraz ciągu q
$a_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ $a_4 = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{72}$	Obliczmy trzeci i czwarty wyraz mnożąc poprzedni wyraz przez liczbę q.
Odp. $3, \frac{1}{2}, \frac{1}{12}, \frac{1}{72}$	

Przykład 7.3.2. Udowodnij, że ciąg $a_n = \frac{5}{3^n}$ jest ciągiem geometrycznym.

Rozwiązanie	**Komentarz**
$a_{n+1} = a_n \cdot q$ $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$	Aby wykazać ,że ciąg jest geometryczny musimy udowodnić ,że iloraz q jest liczbą stałą .
$a_n = \frac{5}{3^n}$	Zapisujemy n –ty wyraz ciągu.
$a_{n+1} = \frac{5}{3^{n+1}}$	Wyznaczamy wyraz następny .
$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $q = \frac{5}{3^{n+1}} : \frac{5}{3^n} = \frac{5}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{5} = \frac{5}{3^n \cdot 3} \cdot \frac{3^n}{5} = \frac{1}{3}$ Odp. Ciąg (a_n) jest geometryczny.	Badamy iloraz q . Iloraz q jest liczbą stałą , zatem ciąg jest geometryczny.

Wzór ogólny ciągu geometrycznego $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Przykład 7.3.3. Wyznacz dziesiąty wyraz ciągu geometrycznego , w którym $a_1 = 18, q = \frac{2}{3}$

Rozwiązanie	**Komentarz**
$a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1}$ $a_{10} = 18 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 = 18 \cdot \frac{512}{19683} = 2 \cdot \frac{512}{2187} = \frac{1024}{2187}$ Odp. Dziesiąty wyraz ciągu jest równy $\frac{1024}{2187}$.	Wykorzystujemy wzór $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

<u>Przykład 7.3.4.</u> Ciąg (b_n) jest monotonicznym ciągiem geometrycznym, którego drugi wyraz jest równy – 4 , a szósty wyraz – 64 . Wyznacz ten ciąg.

Rozwiązanie	Komentarz
$b_2 = b_1 \cdot q^{2-1}$ $b_6 = b_1 \cdot q^{6-1}$ $\begin{cases} -4 = b_1 \cdot q \\ -64 = b_1 \cdot q^5 \end{cases}$	Aby wyznaczyć ciąg geometryczny należy obliczyć jego pierwszy wyraz b_1 i iloraz q. Wykorzystujemy wzór $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ i zapisujemy układ równań .
$\begin{cases} -4 = b_1 \cdot q \ / : q \\ -64 = b_1 \cdot q^5 \end{cases}$ $\begin{cases} b_1 = \frac{-4}{q} \\ -64 = \frac{-4}{q} \cdot q^5 \end{cases}$ $\begin{cases} b_1 = \frac{-4}{q} \\ -64 = -4 \cdot q^4 \end{cases}$ $\begin{cases} b_1 = \frac{-4}{q} \\ q^4 = 16 \end{cases}$ $\begin{cases} b_1 = \frac{-4}{q} \\ q = 4 \vee q = -4 \end{cases}$ $\begin{cases} b_1 = -1 \\ q = 4 \end{cases}$ lub $\begin{cases} b_1 = 1 \\ q = -4 \end{cases}$ Odp. $\begin{cases} b_1 = -1 \\ q = 4 \end{cases}$	Rozwiązując układ równań obliczamy b_1, q . Podając odpowiedź uwzględniamy warunek, że ciąg (b_n) jest monotoniczny. Dla $\begin{cases} b_1 = 1 \\ q = -4 \end{cases}$ otrzymujemy ciąg :1, -4, 16, -64.... .Nie jest to ciąg monotoniczny. Dla $\begin{cases} b_1 = -1 \\ q = 4 \end{cases}$ otrzymujemy ciąg :-1, -4, -16, -64.... . Jest to ciąg malejący.

Zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego

Jeżeli *a* , *b*, *c* są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego , to zachodzi

$$b^2 = a \cdot c$$

<u>Przykład 7.3.5.</u> Uzasadnij, że liczby $\sqrt{2}-1, 1, \sqrt{2}+1$ tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny.

Rozwiązanie	Komentarz
$a = \sqrt{2}-1$ $b = 1$ $c = \sqrt{2}+1$ $b^2 = a \cdot c$ $1^2 = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$ $1 = \sqrt{4}-1$ $1 = 1$	Sprawdzamy czy podane liczby spełniają warunek: $b^2 = a \cdot c$
Odp. Liczby $\sqrt{2}-1, 1, \sqrt{2}+1$ tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny.	Liczby $\sqrt{2}-1, 1, \sqrt{2}+1$ spełniają warunek: $b^2 = a \cdot c$

<u>Przykład 7.3.6.</u> Trzy różne liczby, których suma wynosi 93 tworzą ciąg geometryczny. Liczby te są jednocześnie pierwszym, drugim i siódmym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego. Znajdź te liczby.

Rozwiązanie	Komentarz
a, *b*, *c* – szukane liczby 1) $a + b + c = 93$ 2) *a*, *b*, *c* – ciąg geometryczny $\Rightarrow b^2 = a \cdot c$	Wypisujemy warunki zadania.
3) $a = a_1$ $b = a_2 = a_1 + r$ $c = a_7 = a_1 + 6r$	Do zapisania pierwszego, drugiego i siódmego wyrazu ciągu arytmetycznego stosujemy wzór: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

$\begin{cases} a+b+c=93 \\ b^2=a\cdot c \end{cases}$ $\begin{cases} a_1+a_1+r+a_1+6r=93 \\ (a_1+r)^2=a_1(a_1+6r) \end{cases}$ $\begin{cases} 3a_1+7r=93 \\ a_1{}^2+2a_1r+r^2=a_1{}^2+6a_1r \end{cases}$ $\begin{cases} a_1=\frac{93-7r}{3} \\ r^2-4a_1r=0 \end{cases}$ $r^2-4r\cdot\frac{93-7r}{3}=0/\cdot 3$ $3r^2-372r+28r^2=0$ $31r^2-372r=0$ $r(31r-372)=0$ $r=0$ lub $31r-372=0$ $31r=372/:31$ $r=12$ $r=12$ $a_1=\frac{93-7\cdot 12}{3}=\frac{9}{3}=3$	Zapisujemy i rozwiązujemy układ równań . $r\neq 0$, bo szukane liczby a, b, c są różne.
$a=a_1=3$ $b=a_2=a_1+r=3+12=15$ $c=a_7=a_1+6r=3+6\cdot 12=75$ Odp. Szukane liczby to : 3, 15, 75.	Obliczamy a, b, c

Suma częściowa ciągu geometrycznego

$$S_n=a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{dla } q\neq 1$$

$$S_n=a_1\cdot n \quad \text{dla } q=1$$

Przykład 7.3.7.Oblicz sumę siedmiu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego:1,-2, 4,...

Rozwiązanie	**Komentarz**
$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{-2}{1}=-2$	Wyznaczamy iloraz q ciągu geometrycznego, wykorzystując zależność: $a_2=a_1\cdot q$
1 sposób: $a_1=1$ $a_2=-2$ $a_3=4$ $a_4=4\cdot(-2)=-8$ $a_5=-8\cdot(-2)=16$ $a_6=16\cdot(-2)=-32$ $a_7=-32\cdot(-2)=64$ $S_7=1+(-2)+4+(-8)+16+(-32)+64=43$	Wypisujemy siedem kolejnych wyrazów ciągu i je dodajemy.
2 sposób: $S_7=1\cdot\frac{1-(-2)^7}{1-(-2)}=\frac{1+128}{3}=43$	Wykorzystujemy wzór $S_n=a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$

Przykład 7.3.8. Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 5, a iloraz $q=2$.
Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać , aby otrzymać 315.

Rozwiązanie	**Komentarz**
Dane: Szukane: $a_1=5$ $q=2$ $n=?$ $S_n=315$	Wypisujemy dane i szukane .
$S_n=a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$ $315=5\cdot\frac{1-2^n}{1-2}\ /:5$ $63=\frac{1-2^n}{-1}\ /\cdot(-1)$ $-63=1-2^n$ $2^n=64$ $2^n=2^6$ $n=6$ Odp. Aby otrzymać 315 należy sumować sześć wyrazów.	Wykorzystując wzór $S_n=a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$ zapisujemy równanie z niewiadomą n. Rozwiązując równanie obliczamy ile wyrazów ciągu należy zsumować , aby otrzymać 315.

<u>Przykład 7.3.9.</u> Na trzech półkach ustawiono 76 płyt kompaktowych. Okazało się , że liczby płyt na półkach górnej, środkowej i dolnej tworzą rosnący ciąg geometryczny. Na środkowej półce stoją 24 płyty. Oblicz , ile płyt stoi na półce górnej, a ile płyt stoi na półce dolnej.

Rozwiązanie	Komentarz
Dane: $a_2 = 24$, $S_3 = 76$ Szukane: $a_1, a_3 = ?$	Wypisujemy dane i szukane .
$a_2 = a_1 \cdot q^{2-1}$ $S_3 = a_1 \cdot \frac{1-q^3}{1-q}$ $\begin{cases} 24 = a_1 \cdot q \\ 76 = a_1 \cdot \frac{1-q^3}{1-q} \end{cases}$	Zapisujemy układ równań stosując wzory: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$
$\begin{cases} a_1 = \frac{24}{q} \\ 76 = \frac{24}{q} \cdot \frac{1-q^3}{1-q} \end{cases}$ $76q(1-q) = 24(1-q^3)$ $76q - 76q^2 = 24 - 24q^3$ $24q^3 - 76q^2 + 76q - 24 - 0$ $\underline{24q^3 - 24} - \underline{76q^2 + 76q} = 0$ $24(q^3 - 1) - 76q(q-1) = 0$ $24(q-1)(q^2 + q + 1) - 76q(q-1) = 0$ $(q-1)[24(q^2 + q + 1) - 76q] = 0$ $(q-1)(24q^2 - 52q + 24) = 0$ $q - 1 = 0$ lub $24q^2 - 52q + 24 = 0 / : 4$ $q = 1$ $\quad 6q^2 - 13q + 6 = 0$ $a = 6, b = -13, c = 6$ $\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6 = 25$ $q_1 = \frac{-(-13) - \sqrt{25}}{2 \cdot 6} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ $q_2 = \frac{-(-13) + \sqrt{25}}{2 \cdot 6} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$	Rozwiązujemy układ równań. Równanie trzeciego stopnia rozwiązujemy stosując metodę grupowania wyrazów. Aby rozłożyć wyrażenie $q^3 - 1$ stosujemy wzór $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ Gdyby $q = 1$ **,** to na każdej półce stałyby 24 książki i wszystkich książek byłoby 72, co jest sprzeczne z treścią zadania. Zatem $q \neq 1$ Przy rozwiązywaniu równania $6q^2 - 13q + 6 = 0$ stosujemy wzory : $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$q = \frac{3}{2}$ $a_1 = \frac{24}{q} = 24 : \frac{3}{2} = 24 \cdot \frac{2}{3} = 16$ $a_3 = 24 \cdot \frac{3}{2} = 36$ Odp. Na górnej półce stoi 16 książek, a na dolnej 36.	Gdyby $q = \frac{2}{3}$ liczba książek na poszczególnych półkach tworzyłaby ciąg malejący, co jest sprzeczne z treścią zadania. Do obliczenia a_3 stosujemy zależność $a_3 = a_2 \cdot q$

ĆWICZENIA

Ćwiczenie 7.3.1. (2pkt.) Wyznacz cztery początkowe wyrazy ciągu geometrycznego (a_n), wiedząc, że $a_2 = 3, q = \frac{1}{2}$.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie pierwszego wyrazu ciągu (a_n).	1
2	Podanie trzeciego i czwartego wyrazu ciągu (a_n).	1

Ćwiczenie 7.3.2. (2pkt.) Zbadaj , czy ciąg $b_n = \frac{n-1}{2}$ jest geometryczny .

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wyrazu następnego b_{n+1}.	1
2	Podanie ilorazu $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ i uzasadnienie odpowiedzi.	1

Ćwiczenie 7.3.3. (2pkt.)Dany jest ciąg geometryczny :3,6,12,24,.... .
Oblicz jedenasty wyraz tego ciągu.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie ilorazu q.	1
2	Podanie a_{11}.	1

Ćwiczenie 7.3.4. (3pkt.) Podaj wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) mając dane: $a_2 = 7, a_4 = 28$.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Obliczenie q i a_1(uwzględnienie tylko jednego przypadku)	1
1	Obliczenie q i a_1(uwzględnienie dwóch przypadków)	2
2	Podanie wzorów ogólnych ciągu.	1

Ćwiczenie 7.3.5. (2pkt.) Oblicz, dla jakiej wartości x liczby $x, x+2, x+12$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Ułożenie równania z niewiadomą x	1
2	Podanie wartości x	1

Ćwiczenie 7.3.6. (3pkt.) Trzy liczby , których suma jest równa 13 , tworzą malejący ciąg geometryczny . Jeśli od ostatniej odejmiemy 4, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Ułożenie układu równań	1
2	Podanie rozwiązanie układu równań.	1
3	Podanie odpowiedzi uwzględniając wszystkie warunki zadania.	1

Ćwiczenie 7.3.7. (3pkt.) Wyznacz pierwszy wyraz ciągu (a_n) oraz określ jego monotoniczność jeśli $q = \frac{1}{3}, S_5 = -605$.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Ułożenie równania z niewiadomą a_1	1
2	Obliczenie a_1	1
3	Określenie monotoniczności ciągu	1

Ćwiczenie 7.3.8. (4pkt.) Wacek zbiera znaczki i trzyma je w czterech albumach. W trzecim z nich jest 25 razy więcej znaczków niż w pierwszym, a w ostatnim jest 375 znaczków. Oblicz ile znaczków ma Wacek jeżeli liczby znaczków w poszczególnych albumach tworzą ciąg geometryczny.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	**Odpowiedź**	**Liczba punktów**
1	Wypisanie danych i szukanych w zadaniu.	1
2	Ułożenie układu równań z niewiadomymi q i a_1	1
3	Obliczenie q i a_1	1
4	Podanie ile znaczków ma Wacek.	1